Test di Analisi 2 28/01/22 (secondo appello invernale 20-21)

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.
*Campo obbligatorio

1. Email *

Istruzioni di compilazione: Si usi:
· lo slash per indicare la linea di frazione: 2/3 per $\frac{2}{3}$;
· il carattere ^ per indicare la potenza: 2^3 per 2^3;
· le combinazioni >= per il maggiore o eguale $\geq$ e <= per il minore o eguale $\leq$: 1<=2 per $1 \leq 2$;
· il carattere _ per indicare l'indice: a_n per a_n;
· sqrt (preferibile) oppure ^(1/2) per indicare la radice, dunque sqrt(2) oppure 2^(1/2) per $\sqrt{2}$;
· exp (preferibile) oppure e^ per indicare l'esponenziale, dunque exp(2) oppure e^(2) per e^2;
· Pi per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio ((1+x)/2)^((x+y)/(x-y));
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in (1,2,3);
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare SUM(n=0,infinito)a_n

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 45 minuti)

2. Cognome *

3. Nome *

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Esercizio Uno

Si consideri la serie di funzioni:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ne^{i2nt}}{1+n^2+n^4}$$

$\boxed{\text{PONGO } c_n = \frac{n}{1+n^2+n^4}}$

6. 1 punto

1. Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta:
   - **(a)** la serie non converge puntualmente su $\mathbb{R}$;
   - **(b)** la serie converge puntualmente su $\mathbb{R}$ ma non uniformemente;
   - **(c)** la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] (a)
- [ ] (b)
- [x] (c)

perché $\sum |c_n| < +\infty$

7. 1 punto

2. Si dica quale delle seguenti affermazioni riguardo alla somma della serie $f(t)$ è corretta:

(a) $f(t)$ è reale pari;
(b) $f(t)$ è reale dispari;
(c) $f(t)$ è immaginaria pura pari;
(d) $f(t)$ è immaginaria pura dispari;
(e) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)
- X (d)
- (e)

Si sa che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ è

- reale pari $\Leftrightarrow$ c_n è reale pari
- reale dispari $\Leftrightarrow$ c_n è imm. puro dispari

Dato che c_n è reale dispari $\Rightarrow$ $i c_n$ è imm. puro dispari $\Rightarrow$ $i f(t)$ è reale dispari $\Rightarrow$ $f(t)$ è imm. puro dispari

8. 1 punto

3. Si scriva il periodo di $f(t)$ (oppure si scriva "f non è periodica").

π

Qui $\omega = 2 \Rightarrow$
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$

9.

4. Sempre a proposito di $f(t)$ si individui la risposta corretta tra le seguenti:

(a) $f(t)$ non è continua su $\mathbb{R}$;
(b) $f(t)$ è continua ma non derivabile su $\mathbb{R}$;
(c) $f(t)$ è derivabile su $\mathbb{R}$.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- X (c)

perché $\sum n|c_n| < +\infty$
in quanto $n|c_n| \simeq \frac{1}{n^2}$

10.

5. Si dica quale proprietà dei coefficienti $c_n := \frac{n}{1+n^2+n^4}$ si è sfruttata per rispondere alla domanda precedente.

perché $\sum n|c_n| < +\infty$

in quanto $n|c_n| \simeq \frac{1}{n^2}$

Esercizio Due

Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty]$ definita da

$$f(x,y,z) := \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \qquad (f(0,0,z) = +\infty)$$

dipendente dal parametro $\alpha > 0$ e l'insieme $D \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$D := \left\{(x,y,z) : z \geq 1, x^2+y^2 \leq \frac{1}{z^4}\right\}$$

11.

1. Si dica per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione f è integrabile su D.

(a) $\alpha > 1$;

(b) $0 < \alpha < 1$;

(c) $\frac{3}{4} < \alpha < 1$;

(d) $0 < \alpha < \frac{3}{4}$;

(e) $\alpha > \frac{3}{4}$;

(f) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] (a)
- [ ] (b)
- [ ] (c)
- [x] (d)
- [ ] (e)
- [ ] (f)

$f \geq 0$ misurabile, posso usare Tonelli

$$\iiint_D f(x,y,z) = \int_1^{+\infty} dz \iint_{\{x^2+y^2 \leq \frac{1}{z^4}\}} f(x,y,z)\,dx\,dy$$

(coordinate polari in (x,y)) $\quad \|(x,y)\| \leq \frac{1}{z^2}$

$$= \int_1^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/z^2} \frac{\rho}{\rho^{2\alpha}}\,d\rho =$$

$$= 2\pi \int_1^{+\infty} dz \left[\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right]_0^{1/z^2}$$

qui serve $2-2\alpha > 0$ cioè $\boxed{\alpha < 1}$

$$= \frac{\pi}{1-\alpha} \int_1^{+\infty} \frac{1}{z^{4-4\alpha}}\,dz$$

qui serve $4-4\alpha > 1$ cioè $\boxed{\alpha < 3/4}$

$$= \frac{\pi}{1-\alpha} \left[\frac{z^{4\alpha-3}}{4\alpha-3}\right]_1^{+\infty} =$$

$$\frac{\pi}{(1-\alpha)(4\alpha-3)} \quad \text{se } \boxed{\alpha < \frac{3}{4}}$$

12.

2. Si scriva il valore dell'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$.

2π

se metto $\alpha = 1/2$ nella formula sopra dovo

$Int = \frac{\pi}{(1-1/2)(\frac{4}{2}-3)} = \frac{\pi}{1/2} = 2\pi$

Posso anche fare l'integrale dall'inizio con $\alpha = 1/2 \to$

$\int_1^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{1/z^2} \frac{\rho}{\rho} d\rho = 2\pi \int_1^{+\infty} \int_0^{1/z^2} d\rho = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{z^2} dz = 2\pi \left[-\frac{1}{z}\right]_1^{+\infty} = 2\pi$

Esercizio Tre

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := (x^2 - y^2)y + x^2 + 3y^2$.

Notiamo che (questo può essere utile nel seguito):

$$\mathbf{f(x,y) - 4} =$$
$$x^2(y+1) - y^3 + 3y^2 - 4 = x^2(y+1) - (y+1)(y+2)^2 = (y+1)(x^2 - (y-2)^2) = -\mathbf{(y+1)(y-x+2)(y+x-2)}$$

Si consideri inoltre l'insieme $T \subset \mathbb{R}^2$:

$$T := \{(x, y) : y \leq x - 2, y \leq -x + 2, y \geq -1\}$$

13.

1. Si calcolino tutti i punti critici di f e li si elenchino di seguito precisando per ognuno se si tratta di punti di massimo locale, minimo locale o punto di sella. Basta scrivere una lista del tipo:
(x_1, y_1) di max
(x_2, y_2) di sella
$\vdots$

(0, 0) pto di minimo
(0, 2) pto di sella
(3, −1) pto di sella
(−3, −1) pto di sella

14.

2. Si dica se f ha minimo su $\mathbb{R}^2$.

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] Sì
- [x] No

$f(x,y) = x^2 y - y^3 + x^2 + 3y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2x$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3y^2 + 6y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + 2$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y + 6$

PTI CRITICI $\quad \begin{cases} 2x(y+1) = 0 \\ x^2 = 3y^2 - 6y \end{cases}$ $\quad$ la prima riga si annulla per $x=0$

Se $x=0$ dalla seconda riga ho $3y(y-2)=0$ dunque trovo

$\boxed{(0,0) \quad e \quad (0,2)}$

Se $x \neq 0$ il sistema diventa $\begin{cases} y+1=0 \\ x^2 = 3y^2 - 6y \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x^2 = 9 \end{cases}$

dunque trovo $\boxed{(3,-1) \quad e \quad (-3,-1)}$

CALCOLIAMO L'HESSIANO NEI PTI CRITICI

$P = (0,0) \quad H_f(P) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,0)$ è pto di minimo

$P = (0,2) \quad H_f(P) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,-1)$ è pto di sella

$P = (\pm 3,-1) \quad H_f(P) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 6 \\ \pm 6 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow (\pm 3,-1)$ è pto di sella

det <0

$f(0,y) = -y^3 + 3y^2 \Rightarrow \lim_{y \to +\infty} f(0,y) = -\infty \quad \lim_{y \to -\infty} f(0,y) = +\infty$

f non ha né max né min su $\mathbb{R}^2$

Dato che $f(x,y) - 4 = -(y+1)(y-x+2)(y+x-2)$

e che $\partial D = \{y+1=0\} \cup \{y-x+2=0\} \cup \{y+x-2=0\}$ si vede

subito che $f(x,y) = 4$ se $(x,y) \in \partial D$.

Se P è di max/min su $D \Rightarrow P \in \mathring{D}$ e $\nabla f(P) = 0$ oppure

$P \in \partial D$. L'unico P critico in D è $P=00$ su cui f vale zero se invece $P \in \partial D$ f vale 4

15.

3. Si dica se f ha massimo su $\mathbb{R}^2$.

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] Sì
- [x] No

16.

4. Si trovi il minimo di f su T (o si scriva "non esiste"):

0

17.

5. Si trovi il massimo di f su T (o si scriva "non esiste"):

4

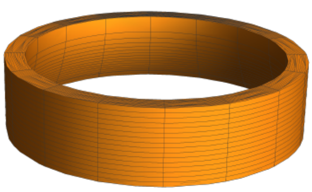
Esercizio Quattro

Si considerino l'insieme $D \subset \mathbb{R}^3$ e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiti da:

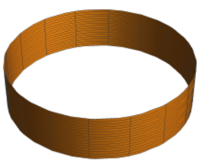
$$D := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, -1 \leq z \leq 0, z^2 + 3 \leq x^2 + y^2\}$$
$$\vec{f}(x, y, z) := 2yz\vec{\mathbf{i}} - 2xz\vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}}$$

Indicheremo con $\hat{\nu}(x, y, z)$ la normale unitaria uscente da D, definita se (x, y, z) è nella frontiera regolare di D. Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti e che $\partial D = A \cup C \cup S$ con

$$C := \{x^2 + y^2 = 4, -1 \leq z \leq 0\} \quad , \quad A := \{3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

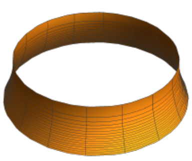


D



C

A



S

18.

1. Quale delle seguenti formule descrive correttamente S

(a) $S := \{x^2 + y^2 = 4, -1 \le z \le 0, z^2 + 3 = x^2 + y^2\}$;
(b) $S := \{x^2 + y^2 \le 4, z^2 \le 1, z^2 + 3 = x^2 + y^2\}$;
(c) $S := \{z \le 0, z^2 \le 1, z^2 + 3 = x^2 + y^2\}$;
(d) $S := \{x^2 + y^2 \le 3, -1 \le z \le 0, z^2 + 3 = x^2 + y^2\}$;
(e) Nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- X (c)
- (d)
- (e)

Se $D = \{x^2+y^2 \le 4, -1 \le z \le 0, z^2+3 \le x^2+y^2\} \Rightarrow$

$\partial D = \{x^2+y^2 = 4, -1 \le z \le 0, z^2+3 \le x^2+y^2\}$ ← C

$\cup \{x^2+y^2 \le 4, -1 = z, z^2+3 \le x^2+y^2\}$ ← è dentro C

$\cup \{x^2+y^2 \le 4, z = 0, z^2+3 \le x^2+y^2\}$ ← A

$\cup \{\underbrace{x^2+y^2 \le 4}_{1}, -1 \le z \le 0, \underbrace{z^2+3 = x^2+y^2}_{2}\}$ ← S

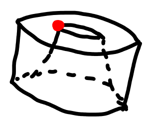
1 e 2 equivalgono a $z^2 \le 1$ e 2 $\Rightarrow z \ge -1$

19.

2. Si trovi $\hat{\nu}\left(1, \sqrt{2}, 0\right)$ oppure si scriva "non esiste".

NON ESISTE

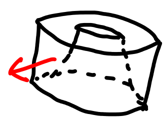
perché $(1, \sqrt{2}, 0)$ è in comune tra A ed S



20.

3. Si trovi $\hat{\nu}\left(\sqrt{3}, -1, -\frac{1}{2}\right)$ oppure si scriva "non esiste".

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$



21.

4. Quale delle seguenti coppie di curve $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ descrive $\Sigma(S)$, coerentemente con $\hat{\nu}$:

(a) $\gamma_1(t) = \sqrt{3}\cos(t)\vec{\mathrm{i}} + \sqrt{3}\sin(t)\vec{\mathrm{j}}, \quad \gamma_2(t) = 2\cos(t)\vec{\mathrm{i}} + 2\sin(t)\vec{\mathrm{j}} - \vec{\mathrm{k}};$

(b) $\gamma_1(t) = \sqrt{3}\cos(t)\vec{\mathrm{i}} + \sqrt{3}\sin(t)\vec{\mathrm{j}}, \quad \gamma_2(t) = 2\cos(t)\vec{\mathrm{i}} - 2\sin(t)\vec{\mathrm{j}} - \vec{\mathrm{k}};$

(c) $\gamma_1(t) = \sqrt{3}\cos(t)\vec{\mathrm{i}} - \sqrt{3}\sin(t)\vec{\mathrm{j}}, \quad \gamma_2(t) = 2\cos(t)\vec{\mathrm{i}} + 2\sin(t)\vec{\mathrm{j}} - \vec{\mathrm{k}};$

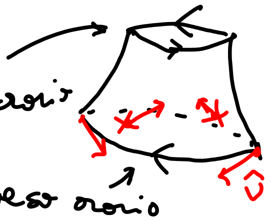
(d) $\gamma_1(t) = \sqrt{3}\cos(t)\vec{\mathrm{i}} - \sqrt{3}\sin(t)\vec{\mathrm{j}}, \quad \gamma_2(t) = 2\cos(t)\vec{\mathrm{i}} - 2\sin(t)\vec{\mathrm{j}} - \vec{\mathrm{k}};$

(e) Nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- ( ) (a)
- ( ) (b)
- (X) (c)
- ( ) (d)
- ( ) (e)

γ_1 gira in verso antiorario



la normale punta verso l'interno

γ_2 gira in verso orario (VISTE DALLE $z \geq 0$)

22.

5. Si trovi un potenziale per $\vec{f}$ oppure si scriva "non esiste".

NON ESISTE

rot $\vec{f} \neq \vec{0}$ basta notare che $\frac{\partial f_3}{\partial y} = 0 \neq \frac{\partial f_2}{\partial z} = -2x$

oppure $\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0 \neq \frac{\partial f_1}{\partial z} = 2x$

23.

6. Si trovi un potenziale vettore per $\vec{f}$ oppure si scriva "non esiste".

$\vec{F} = (y - xz^2)\vec{i} - (x + yz^2)\vec{j}$

(per esempio)

24.

7. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S orientato tramite $\hat{\nu}$.

-2π

Esercizio Cinque

Pot. vettore: lo posso trovare perché $\operatorname{div}\vec{g} = 0$. Lo cerco della forma $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\vec{i} + F_2(x,y,z)\,\vec{j}$ $\quad (F_3 = 0)$

Deve venire ① $\frac{\partial F_2}{\partial z} = -g_1 = -2yz$ ② $\frac{\partial F_1}{\partial z} = g_2 = -2xz$

③ $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = g_3 = -2$

Da ① $\Rightarrow$ $F_2 = -yz^2 + c(x,y)$
Da ② $\Rightarrow$ $F_1 = -xz^2 + d(x,y)$
Metto in ③ e ottengo

$$-0 + \frac{\partial c}{\partial x} + 0 - \frac{\partial d}{\partial y} = -2$$

posso prendere, per esempio, $c = -x$ $\quad d = y$ e allora

$$F_1(x,y,z) = -xz^2 + y \qquad F_2(x,y,z) = -yz^2 - x$$

NOTO che $\operatorname{div}\vec{g} = 0$ DUNQUE

$$\iint_{\partial D} \vec{g}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{g}\, dx\,dy\,dz = 0$$

DUNQUE $\iint_C \vec{g}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma + \iint_A \vec{g}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma + \iint_S \vec{g}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = 0$

MA

$$\iint_A \vec{g}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{\{3\le x^2+y^2\le 4\}} \vec{g}(x,y,-1)\cdot(-\vec{k})\,dx\,dy = \iint_{\{3\le x^2+y^2\le 4\}} -g_3(x,y,-1)\,dx\,dy =$$

$$2\iint_{\{3\le x^2+y^2\le 4\}} dx\,dy = 2\left(\text{Area}(B(0,2)) - \text{Area}(B(0,\sqrt{3}))\right) = 2(\pi\cdot 4 - \pi\cdot 3) = 2\pi$$

MENTRE SU C $\hat{\nu}(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right) \Rightarrow$

$$\vec{g}(x,y,z)\cdot\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{-2yxz}{2} + \frac{xyz}{2} + 0 = 0$$

e quindi $\iint_C \vec{g}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = 0$.

PER DIFFERENZA $\iint_S \vec{g}\cdot d\sigma = -2\pi$

EQ. DIFF.

① $Y_0(t) = e^{tA}\,Y_0(0) = e^t\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix}1-t\\ -1\end{bmatrix}$

(noto che A è già in forma di Jordan)

② Per la non omogenea uso la formula

$$Y(t) = \int_0^t e^{t-\tau} B(\tau)\, d\tau$$

(non c'è l'altro termine dato che la condizione iniziale è nulla)

$$= \int_0^t e^{(t-\tau)} \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{(t-\tau)} \begin{bmatrix} \tau + t - \tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^t e^{(t-\tau)} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$\left(\int_0^t e^{t-\tau}\, d\tau \right) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = \left[-e^{t-\tau} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = (e^t - 1) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si considerino i due sistemi di equazioni differenziali:

$$(S0) \quad \begin{cases} x' = & x+y \\ y' = & y \end{cases} \qquad (S) \quad \begin{cases} x' = & x+y+t \\ y' = & y+1 \end{cases}$$

che possono essere scritti nella forma:

$$(S0) \quad Y' = AY \qquad (S) \quad Y' = AY + B(t)$$

dove

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

25.

1. Si trovi una soluzione $Y_0(t)$ del problema omogeneo $(S0)$ con la condizione iniziale

$$Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(cioè $x(0) = 1, y(0) = -1$).

$Y(t) = e^t \begin{bmatrix} 1-t \\ -1 \end{bmatrix}$ oppure

$x(t) = e^t(1-t)$ $\quad y(t) = -e^t$

26.

2. Si trovi la soluzione $Y(t)$ del sistema (S)con la condizione iniziale (omogenea)

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(cioè $x(0) = 0, y(0) = 0$).

$Y(t) = (e^t - 1) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ oppure

$x(t) = (e^t - 1)\, t$ $\quad y(t) = e^t - 1$